BAYES

Παρασκευή 06/11/20 Μάθημα 5ο.

Σε αντίθεση με τις στατιστικές μεθόδους που έχουμε δει μέχρι τώρα, η Θ. Bayes βασίζεται στο ότι η υπό εκτίμηση παράμετρος Θ. μιας άγνωστης σ.π.π $f(X|\theta)$ είναι τ.μ.

Κλας. στατ. συμπερασματολογία

$X_1, \dots X_n$ τ.δ από πληθυσμό με σ.π.π ή σ.π $f(X|\theta)$ όπου θ άγνωστη αλλά σταθερή παράμετρος

Bayes:

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ από πληθυσμό με σ.π.π ή σ.π $f(X,\theta)$ όπου θ η τιμή μιας τ.μ Θ με γνωστή κατανομή

Η κατανομή της Θ αναφέρεται ως εκ των προτέρων ή εκ των υστέρων.

Ορισμός: Εκ των προτέρων κατανομή της Θ

Είναι η κατανομή που εκφράζει την εκ των προτέρων γνώση που έχουμε για την παράμετρο Θ και καθορίζεται πριν τη συλλογή των δεδομένων.

Ορισμός: Εκ των υστέρων κατανομή της Θ.

Είναι η κατανομή που εκφράζει την εκ των υστέρων γνώση που έχουμε για τη Θ μετά τη συλλογή δεδομένων, δ εκφράζει την ανανεωμένη γνώση που προκύπτει για την παράμετρο Θ μετά τη συλλογή δεδομένων

Μεθοδολογία για την ανάλυση

1) Καθορισμός της σ.π.π ή σ.π $f(\underset{\sim}{x}|\theta)$, όπου θ η τιμή της τ.μ θ (υπο συνθήκη κατανομή της $\underset{\sim}{x}$, δεδομένης της θ)

2) Καθορισμός της εκ των προτέρων κατανομής της τ.μ θ, $\Pi(\theta)$, $\xi(\theta)$

3) Υπολογισμός της εκ των υστέρων κατανομής της θ.

4) Εξαγωγή συμπερασμάτων (στατ. συμπερασματολογία: εκτιμητοσημείο, δ.ε, τεστ. υποθέσεων.

Γνωρίζουμε ότι

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

Γενικότερα αν στη θέση των A και B αντιστοιχίσουμε τιμές διακριτών τ.μ $X=x$, $x\in\mathcal{X}$ και $Y=y$, $y\in\mathcal{Y}$ και θεωρώντας τις κατανομές των X και Y.

$f_X(x) = P(X=x)$, $f_Y(y) = P(Y=y)$, $f_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y)$
$f_{Y|X}(y|x) = P(Y=y|X=x)$

Τότε
$$f_{Y|X}(y_i|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y_i)\, f_Y(y_i)}{\sum_{y\in Y} f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)}$$

Αντίστοιχα για συνεχείς μεταβλητές έχουμε

$$f_{Y|X}(y_i|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y_i)\, f_Y(y_i)}{\int_{y\in Y} f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)}.$$

$$\pi(\theta|X) = \frac{(\text{περιθώρια του } \theta)\cdot(\text{κατανομή του } X|\theta)}{\text{~~από κοινού των~~}\ \text{περιθ. κατανομή του } X} =$$

$$= \frac{\pi(\theta)\cdot f(x|\theta)}{\int_{\text{Π.Ο } \theta} \pi(\theta)\cdot f(x|\theta)\,d\theta}$$

Παράδειγμα 1

Έστω τ.μ X η οποία δοθείσας της τιμής της τ.μ θ ακολουθεί $B(n,\theta)$. Αν η τ.μ θ έχει εκ των προτέρων κατανομή $Beta(a,b)$ να βρεθεί η εκ των υστέρων κατανομή της θ.

Απάντηση

Οι κατανομές των $X|\theta$ και οι εκ των προτέρων της θ δίνονται

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x},\ x=0,1,\ldots$$

$$p(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1},\ \theta\in(0,1)$$

SOS Πρέπει να θυμόμαστε ότι οι εκ των προτέρων και εκ των υστέρων πρέπει να έχουν το ίδιο Π.Ο για τη θ.

Η εκ των υστέρων κατανομή έστω $p(\theta|X)$ θα δίνεται από την:

$$p(\theta|X) = \frac{f(x|\theta)\cdot p(\theta)}{\int_0^1 f(x|\theta)p(\theta)\,d\theta} = \frac{\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{\int_0^1\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\,d\theta}$$

=

$$= \frac{\theta^{a+x-1}(1-\theta)^{n+b-x-1}}{\int_0^1 \theta^{a+x-1}(1-\theta)^{n+b-x-1}\,d\theta}, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

όμως $\int_0^1 \theta^{a+x-1}(1-\theta)^{n+b-x-1}\,d\theta = Beta(a+x, n+b-x)$ $\underbrace{\int_0^1 \frac{\theta^{a+x-1}(1-\theta)^{n+b-x-1}}{Beta(a+x,n+b-x)}\,d\theta}_{=1}$

Άρα έχουμε

$$p(\theta|x) = \frac{\theta^{a+x-1}(1-\theta)^{n+b-x-1}}{Beta(a+x, n+b-x)}$$

Η σ.π.π της Βήτα είναι $f_B(x) = \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{Beta(a,b)}, \ 0 \le \theta \le 1$

Επομένως $p(\theta|x) \sim Beta(a+x, n+b-x)$

Παράδειγμα 2:

Έστω τ.μ $X \sim P(\theta)$. Αν η τ.μ. θ έχει εκ των προτέρων κατανομή $Gamma(p, 1/q)$ να βρεθεί η εκ των υστέρων κατανομή.

Λύση

οι κατανομές του $X|\theta$, εκ των προτέρων της θ δίνονται από

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \ x = 0, 1, \ldots$$

$$p(\theta) = \frac{\theta^{p-1} e^{-\frac{\theta}{1/q}}}{\left(\frac{1}{q}\right)^p \Gamma(p)}, \ \theta \ge 0.$$

Η εκ των υστέρων κατανομή έστω $p(\theta|x)$ θα δίνεται από την:

$$p(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)p(\theta)}{\int_0^{+\infty} f(x|\theta)p(\theta)\,d\theta} = \frac{\frac{\theta^{p-1}e^{-q\theta}}{q^{-p}\Gamma(p)} \cdot \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}}{\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{p-1}e^{-q\theta}}{q^{-p}\Gamma(p)} \cdot \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}\,d\theta} =$$

$$= \frac{\theta^{p-1} e^{-q\theta} \theta^{x} e^{-\theta}}{\int_0^{+\infty} \theta^{p-1} e^{-q\theta} \theta^{x} e^{-\theta} d\theta} = \frac{\theta^{p+x-1} e^{-q\theta(1+q)}}{\int_0^{+\infty} \theta^{p+x-1} e^{-\theta(1+q)} d\theta}$$

Θυμόμαστε ότι η σ.π.π της $Gamma(a,b)$ είναι η

$$f(x) = \frac{x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}}{b^{a}\Gamma(a)}$$

Αρα $p(\theta|x) \sim Gamma(p+x;\ 1/(1+q))$.

ορισμός: Συζυγείς κατανομές

Όταν η εκ των υστέρων κατανομή ανήκει στην ίδια οικογένεια κατανομών που ανήκει η εκ των προτέρων τότε λέμε ότι είναι συζυγής εκ των ~~υστέρων~~ προτέρων κατανομή

Ερώτηση: Πως αλλάζουν τα δύο παραδείγματα αν αντί για τ.μ. από την κάθε κατανομή $B(n,\theta)$, $P(\theta)$ μας έδιναν τυχαίο δείγμα ανεξ. ισόνομων παρατηρήσεων από την αντίστοιχη κατανομή

Αντί για $f(x|\theta)$ θα είχαμε $f(x_i|\theta)$, $x_i=0,1,\dots$ $i=1,2,\dots,n$
και τότε $f(X|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$

Χρήσιμες Ιδιότητες για τη Βήτα κατανομή

αν $X \sim Beta(a,b)$ τότε

- $E(X) = \frac{ab}{a+b}$, • $Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$, • $1-X \sim Beta(b,a)$.

- $Beta(1,1) = U(0,1)$.
- Αν X_1, X_2 ανεξ. και $X_1 \sim Gamma(a_1,b)$, $X_2 \sim Gama(a_2,b)$ τότε $X_1/X_1+X_2 \sim Beta(a_1,a_2)$

▲ Σύνδεση της αναμενόμενης τιμής της εκ των υστέρων κατανομής με αυτή της συζυγούς εκ των προτέρων κατανομής για διωνυμική δειγματική κατανομή:

Αν $X \sim B(n,\theta)$ τότε ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας ΕΜΠ του θ είναι δειγματικό ποσοστό $\hat{\theta} = \frac{X}{n}$ με $E(\hat{\theta}) = \theta$

Η συζυγής εκ των προτέρων κατανομή για την παράμετρο θ της διωνυμικής κατανομής είναι η $\theta \sim Beta(a,b)$ και ισχύει $E(\theta) = \frac{a}{a+b}$

Είδαμε στο παράδειγμα 1 ότι για $X=x$ τότε $\theta|x \sim Beta(a+x, b+n-x)$ οπότε

$$E(\theta|x) = \frac{a+x}{a+b+n} = \frac{n}{a+b+n} \cdot \frac{x}{n} + \frac{a+b}{a+b+n} \cdot \frac{a}{a+b} = w\hat{\theta} + (1-w)E(\theta)$$

όπου $w = n(a+b+n)^{-1}$, $0<w<1$

Δηλαδή η αναμενόμενη τιμή της $E(x)$ των υστέρων κατανομής της θ είναι ο σταθμικός μέσος όρος του ΕΜΠ της θ και της αναμενόμενης τιμής εκ των προτέρων κατανομής της

▲ Όσο μεγαλύτερο το μέγεθος του δείγματος τόσο μεγαλύτερη είναι και η βαρύτητα που δίνεται στη δειγματική πληροφορία.

Για $n \to \infty$ έχουμε $w=1$ και η εκ των προτέρων πληροφορία δεν συνεισφέρει στον υπολογισμό της $E(\theta|x)$

Παράδειγμα 3

Έστω τ.μ. $X \sim U(0,\theta)$. Δίνεται δείγμα n παρατηρήσεων από την κατανομή. Αν η τ.μ. θ έχει εκ των προτέρων κατανομή $U(0,1)$ να βρεθεί η εκ των υστέρων κατανομή της θ.

Λύση

$X \sim U(0,\theta)$ οπότε $f_X(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, 0<x<\theta$. (το x εξαρτάται από το θ)

$p(\theta) = 1, 0<\theta<1$ Η κατανομή του δείγματος είναι

$$f(x_1,\dots,x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i), \quad I_{(0,\theta)}(x_i) = \begin{cases} 1, & 0<x_i<\theta \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\int_{\theta} f_X(x|\theta)p(\theta)\,d\theta = \int_0^1 \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)\,p(\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_{x_{(n)}}^{1} \frac{1}{\theta^n}\,d\theta = \frac{1-x_{(n)}^{1-n}}{1-n}$$, $x_{(n)}$ η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος.

$$0<x_i<\theta \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0<x_1<\theta \\ 0<x_2<\theta \\ \vdots \\ 0<x_n<\theta \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0<\max(x_1\dots x_n)<\theta \\ 0<x_{(n)}<\theta\le 1. \end{array}$$

Έτσι
$$p(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)p(\theta)}{\int_0^1 f(x|\theta)p(\theta)} = \frac{\frac{1}{\theta^n}\prod I_{(0,\theta)}(x_i)}{\frac{1-x_{(n)}^{1-n}}{1-n}} = \frac{(n-1)\theta^{-n}}{x_{(n)}^{-(n-1)}-1}$$

$, 0<x_i<\theta, i=1\dots n$

Παράδειγμα 4

Έστω τ.δ. $X_1,\dots X_n \sim N(\theta,1)$ Αν η τ.μ. θ έχει εκ των προτέρων κατανομή $N(0,1)$ να βρεθεί η εκ των υστέρων της θ.

$X \sim N(\theta,1)$, $\theta \sim N(0,1)$ οποτε

$f_X(x_i|\theta) = (2\pi)^{-1/2} e^{-1/2 (x_i-\theta)^2}$, $x_i \in \mathbb{R}$

$$p(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)p(\theta)}{\int_S f(x|\theta)p(\theta)d\theta} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\theta^2}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\theta^2} d\theta}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\theta)^2} d\theta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i^2-2x_i\theta+\theta^2)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i^2-2x_i\theta+\theta^2)} d\theta} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2} e^{\sum \theta x_i - \frac{n}{2}\theta^2}}{e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{\sum \theta x_i - \frac{n}{2}\theta^2} d\theta}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{\theta\sum x_i - \frac{n}{2}\theta^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{\theta\sum x_i - \frac{n}{2}\theta^2} d\theta} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\theta^2(n+1)}{2}} e^{\theta\sum x_i}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\theta^2(n+1)}{2}} e^{\theta\sum x_i} d\theta}$$

Το ερώτημα είναι σε ποια κατανομή έχουμε καταλήξει

$N(\mu,\sigma^2)$ έχει σ.π.π.

$$(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta^2-2\theta\mu+\mu^2)}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-1/2\sigma^2 \mu^2} \underbrace{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta^2-2\theta\mu)}}_{\text{εξαρτάται από το } \theta}$$

Στην ~~[illegible]~~ κατανομή που βρήκα αν θέσω $n+1 = \frac{1}{\sigma^2}$ και

$\mu = (n+1)^{-1} \Sigma x_i$

βλέπουμε ότι η κατανομή που βρήκαμε είναι κανονική

με $\sigma^2 = \frac{1}{n+1}$ και $\mu = \frac{1}{n+1} \Sigma x_i$

Άρα η εκ των υστέρων κατανομή της θ είναι

$N\{(n+1)^{-1} \Sigma x_i, (n+1)^{-1}\}$

Παράδειγμα 5:

Έστω τ.μ X με πυκνότητα $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $0<\theta<x$.

Αν η τ.μ. θ έχει εκ των προτέρων σ.π.π $f(\theta) = 2e^{-2\theta}$, $\theta>0$

να βρεθεί η εκ των υστέρων κατανομή της θ.

Λύση

Το π.ο της θ εξαρτάται από το x οπότε υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

$$p(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)p(\theta)}{\int_0^x f(x|\theta)p(\theta)d\theta} = \frac{2e^{-2\theta}e^{-(x-\theta)}}{\int_0^x 2e^{-2\theta}e^{-(x-\theta)}d\theta} = \frac{e^{-\theta}e^{-x}}{\int_0^x e^{-\theta}e^{-x}d\theta}$$

$$= \frac{e^{-\theta}}{\int_0^x e^{-\theta}d\theta} = \frac{e^{-\theta}}{-e^{-x}+1}$$

Άρα $p(\theta|x) = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-x}}$, $0<\theta<x$.